Análisis Funcional – Evaluación 6

1. Sean X, Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (i) $T(X)$ es cerrado en Y.

   (ii) T es una aplicación abierta de X sobre $T(X)$.

   (iii) Existe $K > 0$ tal que $\|x + \ker T\| \leqslant K\|Tx\|$ para todo $x \in X$.

   (iv) Existe $M > 0$ tal que para todo $y \in T(X)$ existe $x \in T^{-1}(y)$ verificando $\|x\| \leqslant M\|y\|$.

2. Sea $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para todo $y \in \ell_p$, $1 < p < \infty$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es convergente. Prueba que $x \in \ell_q$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

3. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{F}$ un subconjunto de $L(X,Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) $\mathcal{F}$ está acotado.

   b) Para cada $x \in X$ y cada $g \in Y^*$ el conjunto $\{g(T(x)) : T \in \mathcal{F}\}$ está acotado.